TEORIA DEGLI INSIEMI (pagg. 1-17)

INSIEME: collezione di "oggetti" identificati da una certa proprietà

SIMBOLOGIA

x = variabile

$p(x)$ = proprietà di x

$\iff$ = "se e solo se"

$\exists$ = "esiste / esistono"

$\in$ = "appartiene"

$\emptyset$ = insieme vuoto

$\mathbb{N}$ = numeri naturali

$\mathbb{Z}$ = numeri interi

$\mathbb{Q}$ = numeri razionali

$\mathbb{R}$ = numeri reali

: opp. / = "tale che"

$\forall$ = "per ogni"

$\Rightarrow$ = "implica"

$\nexists$ = "non esiste / non esistono"

$\notin$ = "non appartiene"

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

OPERAZIONI INSIEMISTICHE

A UNIONE B

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \underset{\text{NO ESCLUSIVA}}{\vee} x \in B\}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

A INTERSEZIONE B

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A, \text{ e } x \in B\}$$

B MENO A

$$B \setminus A = \{x \in U : x \in B \text{ e } x \notin A\}$$

A è contenuto in B

$$A \subseteq B \iff x \in A \text{ allora } x \in B$$

Insieme vuoto $\emptyset$ $\rightarrow$ $\nexists\, x \in U : x \in \emptyset$ oppure $\forall x \in U \Rightarrow x \notin \emptyset$

A, B disgiunti $\iff A \cap B = \emptyset$

$A = B \iff \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$

$A \neq B \iff \exists x \in B \setminus A \circ \exists y \in A \setminus B$

differenza simmetrica
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI TRA INSIEMI NUMERICI

①	$A \cup A = A$	UNIONE
②	$A \cup B = B \cup A$	UNIONE
③	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	UNIONE
1'	$A \cap A = A$	INTERSEZIONE
2'	$A \cap B = B \cap A$	INTERSEZIONE
3'	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	INTERSEZIONE
④	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	UNIONE
⑤	$A \cup (A \cap B) = A$	UNIONE
4'	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	INTERSEZIONE
5'	$A \cap (A \cup B) = A$	INTERSEZIONE

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9637745

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$

$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \iff mq = np$

$\mathbb{R}$ = numeri reali → rappresentabili con un modello geometrico: la retta reale

PROPRIETÀ DEI NUMERI REALI

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- ADDIZIONE

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to x + y$

① $\exists\, 0 \in \mathbb{R} \mid x + 0 = x$	ELEMENTO NEUTRO
② $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists (-x) \in \mathbb{R} \mid x + (-x) = 0$	OPPOSTO
③ $x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$	COMMUTATIVA
④ $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$	ASSOCIATIVA

- MOLTIPLICAZIONE

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

① $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \mid x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$	ELEMENTO NEUTRO
② $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$	COMMUTATIVA
③ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$	ASSOCIATIVA
④ $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}\ \exists \frac{1}{x} \in \mathbb{R} : x \cdot \frac{1}{x} = 1$	INVERSO

- CAMPO ORDINATO $(\mathbb{R}, \geq)$

dati $x, y \in \mathbb{R}$ si ha che o $x \geq y$
o $y \geq x$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- PRO PARTE

① se $x \geq y$ $\forall z \in \mathbb{R} \rightarrow x + z \geq y + z$

② se $x \geq y$ $\forall z \in \mathbb{R} : z \geq 0 \Rightarrow z \cdot x \geq z \cdot y$

③ $\forall x, y$ $x \geq y$ $\forall z \geq 0 \Rightarrow zx \geq z \cdot y$

- P. DISTRIBUTIVA

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ si ha $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

~ ° ~ ° ~ ° ~ ° ~ ° ~ ° ~ ° ~ ° ~ ° ~ ° ~ ° ~

Si può dimostrare che ogni elemento di $\mathbb{R}$ si scrive come sopravvia finita di $\alpha_1 \dots \alpha_N, \beta_1 \dots \beta_M$ oppure è periodico.

MODELLO DI NUM. REALI

$x \in \mathbb{R} \iff \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ cifre $\in \{0, \dots 9\}$

$\exists$ un segno $\pm$

$\exists\, \beta_1, \dots \beta_M$ successione infinita di cifre

tale che

$$x = \pm\, \alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots \beta_M \dots$$

$\exists$ quantità notevoli che non sono rappresentate da un numero razionale.

Ad esempio, la lunghezza della diagonale del quadrato di lato 1

- PROPRIETÀ ULTERIORI DI $\mathbb{R}$

- Proprietà di Archimede: dati $x, y > 0$ reali qualsiasi con $x \leq y$
$\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\boxed{ny \geq x}$

- Proprietà del continuo: (tipica di $\mathbb{R}$)

MASTER COPY
Tel. 050 831212
Cell. 388 983

Dati 2 sottoinsiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che
$\forall a \in A, \forall b \in B$ si abbia $a \leq b$
allora $\boxed{\exists z \in \mathbb{R} \text{ tale che } a \leq z \leq b}$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$

- Proprietà di densità

Dati x, y $x \neq y$ $x < y$ $\boxed{\exists \infty \text{ punti distinti tra } x \text{ e } y \text{ tali che } x < z < y}$

ESTREMO SUPERIORE / INFERIORE

DEF: Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, A si dice limitato superiormente se esiste un $M \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in A$ verifica $x \leq M$. Tutti i numeri M si dicono MAGGIORANTI, e il più piccolo di essi si dice ESTREMO SUPERIORE. Se A non è limitato superiormente, si pone $\sup A = +\infty$.

DEF: Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, A si dice limitato inferiormente se esiste un $L \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in A$ verifica $x \geq L$. Tutti i numeri L si dicono MINORANTI, e il più grande di essi si dice ESTREMO INFERIORE. Se A non è limitato inferiormente, si pone $\inf A = -\infty$